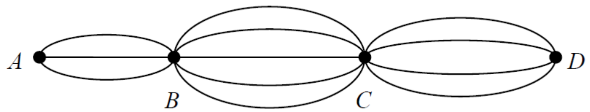
Блок 1. Комбинаторика

Подготовительное занятие. Задания

- Сколько существует двузначных чисел, не содержащих цифры 8?
- Сколькими способами можно из шахматной доски вырезать квадрат из 4 клеток?
- Есть 3 шарика: красный, жёлтый и зелёный. Сколькими способами их можно в ряд?
- В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

1. (а) В киоске продают 3 вида конвертов и 5 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку к нему?
(б) Пусть имеется также 4 вида открыток. Сколькими способами можно составить комплект из конверта, марки и открытки?

2. Сколько различных путей, не проходящих дважды через одну точку, ведёт из A в D?



3. Сколько существует трехзначных номеров билетов от 000 до 999, не содержащих цифры 8?

4. Сколькими способами можно вырезать из шахматной доски две соседние по стороне клетки?

5. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 шаров: синий, белый, красный, жёлтый и зелёный?

6. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (таких, как, например, 54345 и 17071)? Такие числа называются *палиндромами*.

7. (а) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две фигуры: белую и чёрную пешки?
(б) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две белые пешки?

8. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна из цифр 3 и 4?

9. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Комбинаторика — раздел математики, в котором изучается, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Цель занятия — переход от интуитивно понятных способов пересчёта объектов к «правилам сложения и умножения». На самом первом занятии для детей, ещё не столкнувшихся с темой подсчета количества вариантов, полезно разобрать несколько базовых задач и объяснить «правила суммы и произведения».

В первой части занятия можно предложить несколько заданий (они отмечены «точкой»), к которым ученики должны дать только ответ. После этого полезно обсудить, как получены правильные ответы, и сформулировать общие подходы к решениям. В качестве решений представлены разные способы, возможно, ученики будут давать какие-то из них. Знаком [?] отмечены моменты, на которые стоит дополнительно объяснить и обратить внимание.

- ***Числа***. Сколько существует двузначных чисел, не содержащих цифры 8?

  Ответ: 72.
  Решение (перебор). В одном десятке не подойдёт ни одно из чисел. В каждом из восьми остальных — все, кроме одного. Итого $8 \cdot (10 - 1) = 72$ числа.
  Решение (сколько лишних?). Всего двузначных чисел 90 [?]. Не подходят все числа одного десятка (10 штук) и по одному из восьми [?] оставшихся (8 штук). Итого $90 - 10 - 8 = 72$ числа.
  Решение (составим число). Первой цифрой числа может быть любая, кроме 0 и 8, — 8 вариантов. К первой цифре можно приписать любую вторую — 9 вариантов. Всего 8 случаев по 9 вариантов — итого $8 \cdot 9 = 72$ чисел.

- ***Клетки***. Сколькими способами можно из шахматной доски вырезать квадрат из 4 клеток?

  Ответ: 49.
  Решение (перебор по строчкам). Сверху квадрат 2×2 занимает клетки строк 1 и 2. Всего таких квадратов с клетками в строках 1 и 2 — 7 штук [?] (можно пересчитать «пальчиком). Еще 7 квадратов с клетками в строках 2 и 3. Аналогично с парами строк 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 и 7-8. Всего 7 «рядов» по 7 случаев. Всего — $7 \cdot 7 = 49$ вариантов.

- ***Шарики***. Есть 3 шарика: красный, жёлтый и зелёный. Сколькими способами их можно в ряд?

  Ответ: 6.
  Решение (выписать). Можно просто выписать все варианты.
  Решение (умножение). Если первый шарик уже положили (3 варианта), то два других можно положить за ним 2 способами. Всего $3 \cdot 2 = 6$ вариантов.

Дополнение. Ответьте на аналогичный вопрос про 4 шарика.

○ Есть 4 шарика: синий, красный, жёлтый и зелёный. Сколькими способами их можно в ряд?

Ответ: 24.
Решение (умножение). Если первый шарик уже положили (4 варианта), то три оставшихся можно положить 6 способами, что следует из решение задачи про 3 шарика. Всего — $4 \cdot 6 = 24$ вариантов.

- ***Команда***. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

  Ответ: 110.
  Решение. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов выбора.

На примерах решений задач можно выделить следующие способы решения, которые оказались похожи:

- Правило 0 — перебор. Если можно всё выписать, то лучше выписать. Это правило хорошо работает в задаче про шарики, так можно было найти число квадратов в одном ряду на доске, можно было выписать все двузначные числа с цифрой 8.
- Правило 1 — сложение. Если есть несколько случаев, то нужно сосчитать в каждом из случаев, а результаты сложить.
- Правило 2 — умножение. Если есть несколько случаев, а в них получается одинаковый результат, то нужно умножить число случаев на число вариантов. Еще раз правило умножения можно продемонстрировать на примере решения задачи № 3.

Вторая часть занятия — самостоятельное решение задач «с номерами». Задач больше, чем, возможно, решат ученики во время занятия. Задачи № 8 и № 9 сложнее остальных. Рекомендуем в конце занятия разобрать решения задач № 2, № 3, № 4, № 7 (а) и № 7 (б). Остальные задания можно оставить для решения дома, их решения разобрать позже.

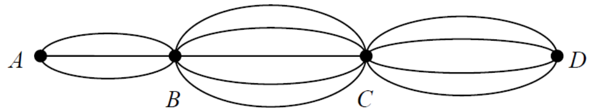
1. (а) В киоске продают 3 вида конвертов и 5 видов марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку к нему?

   (б) Пусть имеется также 4 вида открыток. Сколькими способами можно составить комплект из конверта, марки и открытки?

   Ответ: (а) 15, (б) 60.
   Решение. Комплект «конверт + марка» можно купить $3 \cdot 5 = 15$ способами. А если ещё к каждому комплекту можно выбрать любую из 4 открыток, то таких наборов будет $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2016-2017 учебный год

2. Сколько различных путей, не проходящих дважды через одну точку, ведёт из A в D?



   Ответ: 60.
   Решение. Видно, что из A в B ведут 3 дороги, из B в C — 5 дорог, из C в D — 4 дороги. Тогда по правилу произведения количество путей из A в D равно $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

   Замечание. Обратите внимание учеников, что задачи о конвертах (б) и дорогах в комбинаторном смысле являются одной и той же задачей.

3. Сколько существует трехзначных номеров билетов от 000 до 999, не содержащих цифры 8?

   Ответ: 729.

   Решение (правило умножения). (1) Определим, сколько «однозначных» номеров (от 0 до 9) не содержит восьмерку — их девять. (2) Чтобы получить двузначный номер, не содержащие восьмерок, возьмём любой из найденных однозначных номеров и написать после него любую из девяти допустимых цифр. Всего $9 \cdot 9 = 9^2$ двузначных номеров без восьмерок. (3) За каждым двузначным номером снова можно поставить любую из девяти допустимых цифр. Получим $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ трёхзначных номеров, не содержащих цифру 8.

4. Сколькими способами можно вырезать из шахматной доски две соседние по стороне клетки?

   Ответ: 112.
   Решение. Две соседние клетки образуют либо горизонтальную доминошку, либо вертикальную. Горизонтальную доминошку ( ) можно расположить в первой строке доски 7 способами. Так как всего 8 строк, то число способов равно $7 \cdot 8 = 56$. Не трудно понять, что число способов расположить на доске вертикальную доминошку такое же. Всего $56 + 56 = 112$ способов.

   Дополнение. Можно заметить, что количество пар соседних клеток равно количеству перегородок между клетками. Перегородки образуют 7 горизонтальных линий по 8 штук и 7 вертикальных линий по 8 штук. Итого $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$.

5. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 шаров: синий, белый, красный, жёлтый и зелёный?

Ответ: 120 способов.
Решение. Задача аналогична задаче про шары в первой части. По правилу умножения будет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способов.

6. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (таких, как, например, 54345 и 17071)? Такие числа называются *палиндромами*.

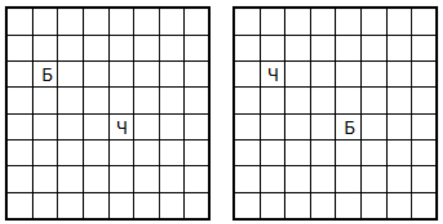
Ответ: 900.
Решение. Заметим, что у пятизначных палиндромов выбираются лишь первые 3 цифры, а последние 2 уже определены (предпоследняя такая же как и вторая, последняя как первая). Тогда вариантов столько же, сколько всего трёхзначных чисел, т.е. 900.

7. (а) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две фигуры: белую и чёрную пешки?

(а) Ответ: 4032.
Решение. Шахматная доска состоит из 64 клеток. Первую фигуру можно поставить на любую клетку — это 64 варианта. Вторую фигуру можно поставить на любую свободную клетку из оставшихся — 63 варианта. Значит, способов выставить на доску две различные фигуры равно $64 \cdot 63 = 4032$.

(б) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две белые пешки?

(б) Ответ: 2016.
Решение. Число вариантов вдвое меньше, чем ответ в пункте (а). Действительно, поставим сначала две разные пешки, а затем чёрную пешку перекрасим в белый цвет. Тогда расстановка двух белых пешек получается из двух расстановок разных пешек. Пример таких двух расстановок показан на рисунке.



Значит, число расстановок двух белых пешек равно $64 \cdot 63 : 2 = 2016$.

8. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна из цифр 3 и 4?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5-6
2016-2017 учебный год

Замечание по условию. Рассматриваются трёхзначные числа, в записи которых есть цифра 3, есть цифра 4 или есть обе указанные цифры.

Ответ: 452.
Решение (сколько лишних?). Удобно посчитать те трёхзначные числа, в которых нет этих двух цифр. Тогда на первом месте может стоять любая из 7 цифр (не могут стоять 3, 4 и 0), на втором и третьем — по 8 (уже можно ставить 0). Получается $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$. А как мы помним, трёхзначных чисел всего 900, поэтому ответ: $900 - 448 = 452$.

Решение (сложно). Можно найти количество трёхзначных чисел с цифрой 4, количество трёхзначных чисел с цифрой 3. При этом, числа, в которых есть и цифра 3, и цифра 4, учтены в обоих случаях. Нужно найти это количество и вычесть его из суммы первых двух.
В одной сотне первая цифра — 3. В каждой из остальных 9 сотен по 19 чисел с цифрой 3 [?] (сравните с решением задачи «Числа»). Итого $100 + 8 \cdot 19 = 252$.
Столько же трёхзначных чисел с цифрой 4 в своей записи.
Рассмотрим числа с цифрами 3, 4, где третья цифра не 3 и не 4.Чисел вида 34∗, 3∗4, 43∗, 4∗3 по 8 штук [?], чисел вида ∗43, ∗43 по 7 штук [?]. Итого $4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 32 + 14 = 46$. Числа, составленные только из 3 и 4, всего 6 штук: 334, 343, 433, 443, 434, 344.
Искомое количество: $252 + 252 - 46 - 6 = 452$.

9. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).

Ответ: 17 760.
Подсказка. На каждом месте каждая из цифр встречается $4 \cdot 4 = 16$ раз.
Решение. Если в какой-то разряд поставлена цифра 1, то остальные два разряда можно заполнить цифрами $4 \cdot 4 = 16$ способами. Аналогично для цифр 2, 3 и 4. Значит, на каждом месте каждая из цифр встречается $4 \cdot 4 = 16$ раз.
Найдём сумму по разрядам. Сумма сотен равна $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 100$, сумма десятков равна $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 10$, сумма единиц равна $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$. Всего $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) \cdot 111 = 17\,760$.

Замечание. Обратите внимание, что при решении данной задачи соображения комбинаторики становятся вспомогательными.