2019

# Подготовка к ЕГЭ по математике

## Теория для решения заданий «Уравнения»

Наталья и Александр Крутицких
www.matematikalegko.ru

Проверка навыков умения решать уравнения. Чаще встречаются логарифмические, квадратные (рациональные и иррациональные, которые сводятся к квадратным) и показательные уравнения, реже тригонометрические. Будьте внимательны, записывая ответ. В любом случае, ОБЯЗАТЕЛЬНО делайте проверку, много времени это не займёт, а вас избавит от ошибок. Помните, что ответ это целое число или конечная десятичная дробь.

Обратите внимание:

- решая уравнения, в которых получается больше одного корня, выбирайте правильный ответ, в вопросе всегда указывается, какое значение требуется найти.
- вы можете знать, как решать, но не дорешать, иногда из-за спешки выпускники записывают какой-либо промежуточный результат. Например, в уравнении $\log_4(3x+4)=2$ записывают в ответе 16.

Итак, задачи включают в себя:

Линейные и квадратные уравнения

Рациональные уравнения

Иррациональные уравнения

Показательные уравнения

Логарифмические уравнения

Тригонометрические уравнения

Знание нижеуказанных формул и свойств необходимо для решения заданий данной группы:

Формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Степени и корни:

$$a^0 = 1$$

Нулевая степень любого числа равна единице.

* * *

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a \neq 0 \quad n - \text{натуральное число}$$

Суть данного свойства заключается в том, что при переносе числителя в знаменатель и наоборот, знак показателя степени меняется на противоположный. Например:

$$\frac{x^7}{y^{-2}} = \frac{y^2}{x^{-7}}$$

Следствие из данного свойства $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$* * *$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$* * *$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней складываются.

$$* * *$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad m > n, \qquad a \neq 0$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остаётся прежним, а показатели степеней вычитаются.

***

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

При возведении степени в степень основание остаётся прежним, а показатели перемножаются.

***

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

При возведении в степень дроби, в эту степень возводится и числитель и знаменатель.

***

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \qquad (m > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad (k > 0)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \ \text{ если } m \leq 0, \text{то } \ a \neq 0$$

## Логарифм

Логарифмом числа $a$ по основанию $b$ называется показатель степени, в который нужно возвести $b$, чтобы получить $a$.

$$\log_b a = x \qquad b^x = a \quad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$$

Например:

$$\log_3 9 = 2 \text{ , так как } 3^2 = 9$$

Основное логарифмическое тождество:

$$b^{\log_b a} = a$$

Свойства логарифмов:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_x(ab) = \log_x a + \log_x b$$

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Частные случаи логарифмов:

$$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x - \textit{натуральный}$$

$$\lg x = \log_{10} x - \textit{десятичный}$$

***

**Тригонометрические уравнения**

Решение простейших тригонометрических уравнений (в итоге к ним сводятся все тригонометрические уравнения):

$$\sin x = a$$

имеет решение при $\quad -1 \le a \le 1$

Решением являются два корня ($Z$ − целое число):

$$x_1 = \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\ a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin\ a + \pi k, \quad k \in Z$$

***

$$\cos x = a$$

имеет решение при $\quad -1 \le a \le 1$

Решением являются два корня:

$$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

Если получите $\cos x = 7$ или $\sin x = -\dfrac{10}{7}$

Знайте, решения у данных уравнений нет, так как значения лежат за пределами интервала $[-1; 1]$.

***

$$\operatorname{tg} x = a$$

имеет решение при любом $\quad a$

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arctg}\ a + \pi n, \quad n \in Z$$

***

$$\operatorname{ctg} x = a$$

имеет решение при любом $\quad a$

Решением является корень:

$$x = \operatorname{arcctg}\ a + \pi n, \quad n \in Z$$

Итак, формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:

| Уравнение | Решения |
|---|---|
| $\sin x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$ | $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$ |
| $\cos x = a,\ \lvert a\rvert \leqslant 1$ | $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| $\operatorname{tg} x = a$ | $x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$ |
| $\operatorname{ctg} x = a$ | $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$ |

Значения sin, cos, tg, ctg острых углов от 0° до 90°,

которые необходимо помнить:

| Аргумент | Функция | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
| 0° (0) | 0 | 1 | 0 | не определен |
| 30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | 1 | 0 | не определен | 0 |

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчётах неверное значение.

Используйте алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от 0 до 90 градусов.

0°   30°   45°   60°   90°

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | | | | |
| $\cos\alpha$ | | | | | |

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\cos\alpha$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

4. Далее извлекаем корень

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\sqrt{0}$ | $\sqrt{1}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{4}$ |
| $\cos\alpha$ | $\sqrt{4}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{1}$ | $\sqrt{0}$ |

5. Делим на 2

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |

6. Считаем

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов. Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

вы сможете найти значения для указанных углов.

Например:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg}30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

И так для любого угла.

# Список сайтов по другим предметам:

Подготовка к экзамену по русскому языку

Подготовка к экзамену по литературе

Подготовка к экзамену по химии

Подготовка к экзамену по истории и обществознанию

Подготовка к экзамену по биологии

# Бесплатные материалы для подготовки по математике:

Сайт Яковлева Игоря Вячеславовича  здесь.

Материалы ЕГЭ-Судии на этой странице.

Сайт Александра Ларина.

# Платные курсы

## Посмотреть подробнее

## Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ (ГИА) КУРС Видеорепетитор.

# Полезные ресурсы:

Материалы для учителей и учеников Портал Инфоурок.

Подготовка к ЕГЭ по математике – блог Инны Фельдман.

Портал Дмитрия Тарасова Видеоуроки в Интернет.

Обучение онлайн ЕГЭ, ОГЭ, олимпиады   Библиотека курсов Фоксворд